БИЛЕТ 7 ПРАКТИКА.

Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

В математике, смешивание является абстрактным понятием, происходящим из из физики: попытка описать необратимый термодинамический процесс смешивания в повседневном мире: смешивание красок, смешивание напитков и т.д.

Это понятие появляется в эргодической теории - исследовании случайных процессов и динамических систем, сохраняющих меру. Существует несколько различных определений смешивания, включая сильное перемешивание, слабое перемешивание. Некоторые из различных определений микширования можно расположить в иерархическом порядке; таким образом, сильное перемешивание означает слабое перемешивание. Кроме того, слабое перемешивание (и, следовательно, также сильное перемешивание) подразумевает эргодичность: то есть каждая система, которая слабо перемешивается, также является эргодической (и поэтому говорят, что перемешивание является «более сильным» понятием, чем эргодичность).

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ будет динамической системой, где T - время эволюция или оператор сдвига.
Система называется **сильным перемешиванием**, если $\forall A, B \in \mathcal{A}$ один имеет:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

Чтобы понять приведенное выше определение физически, рассмотрим шейкер M, наполненный несжимаемой жидкостью, которая состоит из 20% вина и 80% воды. Если A – это область, изначально занятая вином, то для любой области внутри шейкера процент вина в после повторений процесса перемешивания составляет

$$\frac{\mu(T^n A \cap B)}{\mu(B)}.$$

В такой ситуации можно было бы ожидать, что после того как жидкости достаточно перемешаны ($n \to \infty$), каждая область шейкера будет содержать приблизительно 20% вина. Это приводит к

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(T^n A \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(A)}{\mu(M)} = \mu(A),$$

где $\mu(M) = 1$, поскольку сохраняющие меру динамические системы определены в вероятностных пространствах, и, следовательно, окончательное выражение подразумевает приведенное выше определение сильного перемешивания.

Определение. Динамическая система называется **слабым перемешиванием**, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Другими словами T – сильное перемешивание, если

$$\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B) \to 0 \quad \text{в обычном смысле.}$$

Слабое перемешивание, если

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| \to 0 \quad \text{в смысле Чезаро.}$$

Эргодичность, если

$$\mu(A \cap T^{-n}B) \to \mu(A)\mu(B) \quad \text{в смысле Чезаро.}$$

Следовательно, сильное перемешивание означает слабое перемешивание, что подразумевает эргодичность. Однако обратное неверно: существуют эргодические динамические системы, которые не являются слабо перемешивающими, и слабо перемешивающие динамические системы, которые не являются сильно перемешивающими.

Определение суммирования Чезаро.

Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ будет последовательностью, и пусть $s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$, его $k-$ая частичная сумма.

Последовательность (a_n) называется **суммируемая по Чезаро**, с суммой Чезаро $A \in R$, если, когда n стремится к бесконечности, среднее арифметическое его первых n частичных сумм $s_1, s_2, ..., s_n$ стремится к A:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k = A.$$

Эргодичность равносильна справедливости для любых функций $f, g \in L^2$ соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \left(\int_X f(x)g(T^s x)\mu(dx) - \int_X f(x)\mu(dx) \int_X g(x)\mu(dx) \right) = 0,$$

Слабое перемешивание

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \left(\left| \int_X f(x)g(T^s x)\mu(dx) - \int_X f(x)\mu(dx) \int_X g(x)\mu(dx) \right| \right) = 0,$$

Сильное смешивание:

$$\lim_{t\to\infty} \left(\int_X f(x)g(T^s x)\mu(dx) - \int_X f(x)\mu(dx) \int_X g(x)\mu(dx) \right) = 0.$$